# Experiência 3 - Oscilações harmônicas simples

## 1. OBJETIVO

O objetivo desta aula é discutir e realizar experimentos envolvendo um conjunto massa mola. Os experimentos envolvem uma parte estática e outra dinâmica. Na parte estática realizaremos medidas da variação da posição de equilíbrio de um sistema massa mola no campo gravitacional ao ser variada a massa do conjunto. Na parte dinâmica colocaremos o sistema para oscilar e mediremos o período de oscilação em função da massa do conjunto. Nesses experimentos desprezaremos o atrito com o ar.

## 2. INTRODUÇÃO

Sistemas massa-mola aparecem muito freqüentemente em nosso cotidiano. Como exemplos simples temos os amortecedores de automóveis e dinamômetros para medidas de força. Lembre-se de que quando nos pesamos na farmácia, por exemplo, estamos fazendo de fato uma medida de força. A deformação decorrente da ação de uma força para a maioria dos materiais pode ser modelada, em muitas situações, como um sistema massa-mola, desde que as forças utilizadas sejam tais que as deformações no material não ultrapassem o regime elástico. Esse é, portanto, um modelo muito utilizado devido a sua simplicidade.

No caso de uma mola ideal com massa desprezível, como representado na FIG.1, a relação entre a força exercida pela mola e a deformação por ela sofrida pode ser escrita como:

$$\vec{F}_M = -k\Delta y\hat{y}, \qquad (1)$$

onde $k$ é a constante de força da mola e $\Delta y$ é o módulo da variação da posição da extremidade da mola. A força exercida pela mola é uma força restauradora. Isso quer dizer que ela tem sentido contrário ao sentido da deformação por ela sofrida. De acordo com a FIG. 1, se $\Delta y$ é maior que zero, ou seja, a extremidade da mola se desloca no sentido positivo do eixo *y*, a força da mola tem sentido $-\hat{y}$. Por outro lado, se $\Delta y$ é menor que zero, ou seja, a extremidade da mola se desloca no sentido negativo do eixo *y*, a força da mola tem sentido $+\hat{y}$.

Na FIG.1 apresentamos um esquema do aparato experimental que usaremos nesta aula:

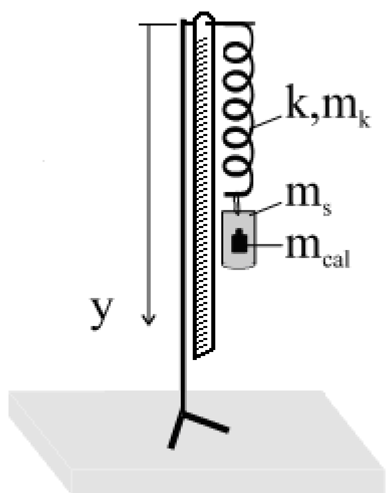


FIG. 1 - Esquema do aparato experimental usado na experiência do oscilador harmônico simples.

A mola que utilizaremos é uma mola real e possui massa não nula. Para modelá-la diremos que ela possui uma massa $m_k$, que deve ser considerada como uma massa extra nos experimentos, acoplada à extremidade da mola.

Vamos fazer algumas definições que são importantes para a correta análise de nossos resultados. Além da constante elástica $k$ da mola e sua massa $m_k$ , chamaremos de $m_s$ a massa do suporte que usaremos, $m_{cal}$ a massa variável calibrada que será colocada no suporte. Vamos chamar de $y_e(0)$ a posição da extremidade da mola ideal, não deformada. Devido à ação de seu próprio peso a mola tem uma pequena deformação, mudando a posição de sua extremidade. Chamaremos essa nova posição de $y_e(m_k)$. Quando colocamos o suporte que será usado nos experimentos a posição da extremidade muda novamente e essa nova posição de equilíbrio será representada por $y_e(m_k+m_s)$. Finalmente, ao introduzirmos a massa variável calibrada $m_{cal}$ no suporte a nova posição de equilíbrio será $y_e(m_k+m_s+m_{cal})$.

***Equilíbrio estático***

Considerando a segunda lei de Newton para a massa total do sistema massa-mola no caso estático, podemos escrever:

$$\sum \vec{F} = 0, \tag{2}$$

onde as forças são o Peso, $\vec{P}$:

$$\vec{P} = (m_k + m_s + m_{cal})g \quad \hat{y}, \tag{3}$$

sendo $\hat{y}$ o vetor unitário na direção do eixo $y$ e a força na mola, $\vec{F}_M$ :

$$\vec{F}_M = -k\left[ y_e(m_k + m_s + m_{cal}) - y_e(0) \right]\hat{y}. \tag{4}$$

Usando a Eq.(2) obtemos:

$$y_e(m_k + m_s + m_{cal}) - y_e(0) = (m_k + m_s + m_{cal})g. \tag{5}$$

Observe que não precisamos conhecer a posição de equilíbrio da mola ideal sem deformação nenhuma $y_e(0)$. Isto porque podemos fazer medidas relativas e eliminá-la. Vamos medir a posição de equilíbrio da mola com o suporte $y_e(m_k+m_s)$ e veremos as variações em relação a esta posição, quando variamos a massa $m_{cal}$. Fazendo isso chegamos a:

$$y_e(m_k + m_s + m_{cal}) - y_e(m_k + m_s) = \frac{m_{cal}}{k} g\,;$$

$$\Delta y_e = \frac{m_{cal}}{k} g. \tag{6}$$

Em outras palavras, se o sistema estiver em equilíbrio estático, com o suporte para as massas na posição $y_e(m_k+m_s)$, o deslocamento $\Delta y_e$ com relação a esta posição inicial, dependerá apenas da massa $m_{cal}$ acrescentada dentro do suporte**,** além é claro da constante da mola $k$ e da aceleração da gravidade $g$ .

***Oscilações harmônicas simples***

No caso de colocarmos o sistema massa-mola para oscilar, temos pela segunda lei de Newton que:

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}\,, \tag{7}$$

Onde $M = m_{ef} + m_s + m_{cal}$ , $m_{ef}$ é a massa efetiva da mola oscilante. Observe que substituímos a massa $m_k$ da mola pela massa $m_{ef}$. Fizemos isso porque como veremos, o período de oscilação do oscilador harmônico simples depende de $m_{ef}$ e quando analisarmos os resultados veremos também, que a massa efetiva $m_{ef}$ é diferente da massa da mola $m_k$. Você consegue explicar o porquê dessa diferença? Vamos denominar $y_e(M,t)$, que agora depende do tempo, simplesmente por $y(t)$ . Temos:

$$\vec{P} = Mg \quad \hat{y}, \tag{8}$$

$$\vec{F}_M = -k\left[ y(t) - y_e(0) \right] \quad \hat{y}, \tag{9}$$

e:

$$\vec{a} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}\hat{y}. \tag{10}$$

Assim:

$$\begin{aligned} M\,\frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= Mg - k\left[ y(t) - y_e(0) \right], \\ M\,\frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= Mg - k\left\{ \left[ y(t) - y_e(M) \right] + \left[ y_e(M) - y_e(0) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Na segunda linha da equação acima, introduzimos o termo $y_e(M)$, somando-o e subtraindo-o dentro do colchete. Com isto podemos fazer um cancelamento, pois usando a Eq.(5) temos que $k\left[ y_e(M) - y_e(0) \right] = Mg.$ Ficamos com:

$$M\,\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -k\left[ y(t) - y_e(M) \right]. \tag{12}$$

Definindo:

$$\eta_0(t) = y(t) - y_e(M), \tag{13}$$

podemos escrever:

$$\frac{d^2 \eta_0}{dt^2} = -\omega_0^2 \eta_0, \tag{14}$$

com:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}, \tag{15}$$

onde $\eta_0$ descreve as oscilações em torno da posição de equilíbrio para uma determinada massa $M$ no suporte.

A solução da equação diferencial descrita na Eq.(14) é uma combinação linear de funções *seno* e *cosseno* com período de oscilação dado por:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}, \tag{16}$$

Escrevendo em termos das massas $m_{ef}$, $m_s$, $m_{cal}$:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_{ef} + m_s + m_{cal}}{k}}. \tag{17}$$

# 3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

## Equilíbrio estático

1 - Meça a massa $m_k$ da mola que será usada e meça também a massa $m_s$ do suporte-recipiente onde serão colocadas as massas calibradas.

2 - Pendure a mola no suporte em que está instalada a régua e pendure o recipiente (sem nenhuma massa dentro) na mola.

3 - Coloque massas calibradas dentro do recipiente e meça, usando a régua colocada junto à montagem, as respectivas posições de equilíbrio estático $y_e(m_k + m_s + m_{cal})$. Você pode utilizar uma única massa calibrada por vez, ou fazer combinações com duas ou mais massas. Forme um conjunto de dados contendo pelo menos **6** medidas.

## Oscilações

1 - Coloque o sistema massa-mola para oscilar. A amplitude das oscilações não precisa ser muito grande.

2 - Use um cronômetro para medir o período da oscilação da massa presa à mola. A incerteza na medida do período fica menor se, ao invés de medirmos uma única oscilação, medirmos o tempo correspondente a várias oscilações e dividimos o valor obtido pelo número de oscilações. Meça o intervalo de 5 períodos de oscilação para um determinado valor da massa $M$ colocada no suporte. Faça a medida do período de oscilação para diferentes valores de massa, de tal forma que um conjunto com pelo menos **6** valores de $T_0$ seja obtido.