Experiência 4 - Pêndulo

1 - OBJETIVO

O objetivo desta aula é discutir o movimento harmônico de um pêndulo físico e realizar um experimento sobre o mesmo. Através de medidas de parâmetros do movimento do pêndulo, determinaremos experimentalmente o valor da aceleração da gravidade no laboratório, bem como o valor do raio de giração de uma barra em torno de um eixo passando por seu centro de massa.

2 - INTRODUÇÃO

Um pêndulo gravitacional, ou *pêndulo físico*, consiste simplesmente de um corpo rígido suspenso por um ponto que não esteja localizado sobre seu centro de massa, de modo que, quando submetido a pequenos deslocamentos angulares em relação à direção vertical, realiza um movimento oscilatório sob a ação da força gravitacional. Um caso particular do pêndulo físico é o *pêndulo simples*, onde uma massa pontual é conectada a uma haste de peso desprezível, suspensa por uma de suas extremidades. Esses sistemas físicos exibem uma propriedade muito importante: seu movimento é periódico e se considerarmos pequenas amplitudes de deslocamento, seu período depende apenas da distância do ponto de suspensão a seu centro de massa, da aceleração da gravidade no local e da distribuição de sua massa em torno de seu centro de massa. Por esse motivo o pêndulo físico é um excelente marcador de tempo e até 1930 os melhores relógios existentes eram relógios de pêndulo. Como o período de seu movimento depende da aceleração da gravidade, o pêndulo físico pode ser usado para determinar a aceleração da gravidade em um dado local. Nesta aula, nós discutiremos o movimento do pêndulo físico e realizaremos medidas dos parâmetros de seu movimento.

1 - ***Descrição do modelo teórico para o experimento***

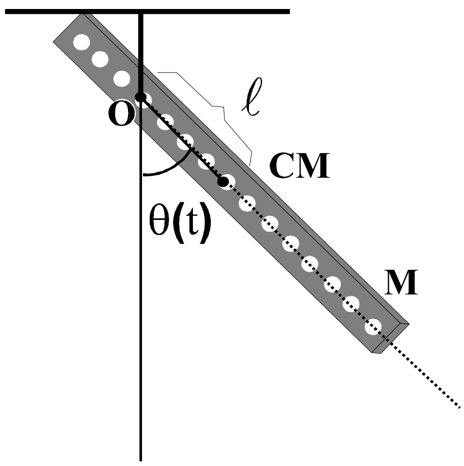

FIG. 1 – Corpo rígido de massa M , suspenso de um ponto **O** , podendo girar livremente em torno de um eixo fixo que passa pelo ponto de suspensão.

Considere o arranjo mostrado na FIG.1, onde um corpo rígido de massa M, sob ação da força gravitacional da Terra, pode girar sem atrito em torno de um eixo fixo horizontal passando pelo ponto de suspensão **O**. Na figura, **CM** representa o centro de massa do corpo, situado à distância l do ponto **O**. O único grau de liberdade desse sistema pode ser representado pelo ângulo θ entre a linha que passa por **O** e **CM** e a direção vertical. Nós consideraremos o eixo fixo como sendo o eixo *z*, com seu sentido positivo apontando para o leitor.

Para obtermos a equação horária da variável angular $\theta(t)$, basta aplicarmos a esse sistema a equação fundamental da dinâmica das rotações:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}, \tag{1}$$

onde $\vec{L}$ é o momento angular do corpo em relação a **O** e $\vec{\tau}$ é o torque resultante atuando sobre o sistema, em relação ao ponto **O**. Note que, nesse caso, tanto o momento angular $\vec{L}$ quanto o torque $\vec{\tau}$ são paralelos ao eixo de rotação. Como estamos tratando com um corpo rígido, podemos escrever $\vec{L} = I\vec{\omega}$ onde I é o momento de inércia da corpo em relação ao eixo fixo *x*, e $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{z}$ é sua velocidade angular. Além disso, como o momento de inércia de um corpo rígido em relação a um eixo fixo é constante, podemos reescrever a Eq.(1) como:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{z} = \vec{\tau}. \tag{2}$$

A fim de calcularmos o torque resultante sobre o corpo rígido, apresentamos na FIG.2 um diagrama das forças atuando sobre ele.

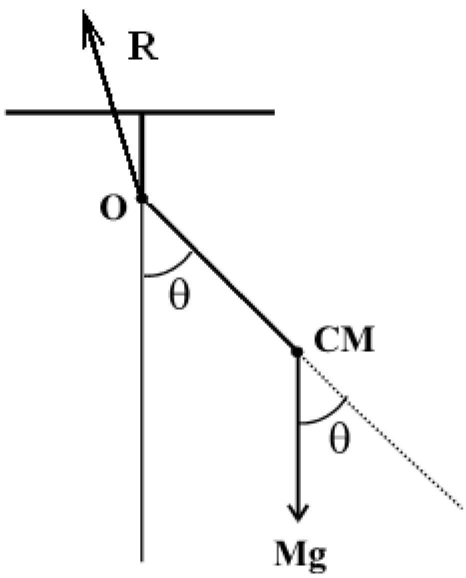

FIG. 2 – Diagrama das forças atuando sobre o corpo rígido da FIG.1.

Da FIG.2 e da FIG.1, é fácil ver que o torque resultante sobre o corpo rígido, em relação ao ponto **O**, é dado por $\vec{\tau} = -Mglsen\theta\hat{z}$. Substituindo essa expressão na Eq.(2) obtemos a equação de movimento para a variável angular $\theta(t)$:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl\,\mathrm{sen}(\theta). \tag{3}$$

A equação diferencial acima é de difícil solução. Contudo, se nos restringirmos a valores pequenos da variável angular θ tais que, $\theta << 1$ (medido em radianos), podemos aproximar $\mathrm{sen}(\theta)$ por θ na equação acima, obtendo a nova equação de movimento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgl}{I}\theta, \tag{4}$$

que é de fácil solução. Essa é a equação de movimento para o oscilador harmônico simples, que você já conhece. A sua solução pode ser escrita como:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{5}$$

onde $\omega = \sqrt{\dfrac{Mg\ell}{I}}$ e A e φ são constantes determinadas pelas condições iniciais.

A Eq.(5) mostra que se o corpo rígido da FIG.1 for deslocado da vertical por um pequeno ângulo θ_0 e depois solto, ele realizará um movimento oscilatório em torno da vertical, de freqüência ω e amplitude $A = \theta_0$. O período T desse movimento oscilatório será dado por :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgl}}. \tag{6}$$

Na expressão acima, o período de oscilação do corpo rígido parece depender do valor de sua massa *M*, o que não é verdade. Portanto vamos reescrever o período em uma forma mais adequada. Primeiro vamos escrever o momento de inércia *I* do corpo, em relação ao eixo fixo de rotação, em função de seu momento de inércia I_{CM}, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa e é paralelo ao eixo de rotação (veja a FIG.3). Para isso, usaremos o *teorema dos eixos paralelos*, que diz que o momento de inércia de um corpo qualquer em relação a um certo eixo é a soma do momento de inércia em relação a um eixo paralelo passando pelo centro de massa com o produto da massa *M* do corpo pelo quadrado da distância ℓ entre os dois eixos.

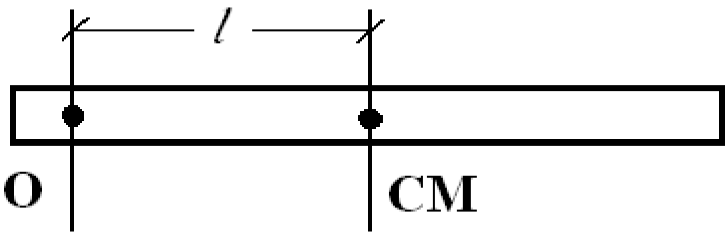

FIG. 3 – Ilustração do teorema dos eixos paralelos

Podemos, portanto, escrever $I = I_{CM} + M\ell^2$. Por último, definiremos o *raio de giração,* r_G, do corpo rígido em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa: o momento de inércia pode sempre ser escrito como o produto da massa do objeto pelo quadrado de um comprimento. Assim, podemos escrever $I_{CM} = Mr_G^2$, ou seja, o raio de giração r_G é o comprimento que relaciona a massa total do objeto com seu momento de inércia I_{CM} (relativo ao seu centro de massa). Obtemos então $I = M(r_G^2 + \ell^2)$. Substituindo esta expressão na Eq.(6) para o período *T*, temos finalmente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(l + \frac{r_G^2}{l}\right)}. \tag{7}$$

A expressão acima nos mostra que o período de oscilação do pêndulo físico depende do valor da aceleração da gravidade, da distância do ponto de suspensão do pêndulo ao seu centro de massa e do raio de giração do pêndulo em relação a um eixo passando pelo seu centro de massa e paralelo ao eixo de rotação. Através do raio de giração r_G, o período do pêndulo físico depende de como a massa está *distribuída* em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa. É por isso que nos antigos relógios de pêndulo existe um disco preso à haste do pêndulo, podendo ser deslocado ao longo da mesma. Para ajustar o relógio, quando ele está atrasando ou adiantando, muda-se a posição do disco ao longo da haste. Ao deslocarmos o disco estamos modificando a distribuição de massa do pêndulo e com isso seu raio de giração r_G. Mudando r_G, mudamos o período do pêndulo.

Se variarmos a distância ℓ do ponto de suspensão do pêndulo ao seu centro de massa e medirmos os períodos correspondentes, podemos facilmente determinar experimentalmente os valores de g e r_G ao ajustarmos os pontos experimentais com uma função tentativa do tipo $y = 2\pi\sqrt{\frac{1}{a}\left(x + \frac{b^2}{x}\right)}$, na qual os valores dos parâmetros a e b que melhor ajustam essa função aos pontos experimentais nos fornecerão os valores da aceleração da gravidade g e do raio de giração r_G, respectivamente.

3 - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

1 – Meça o comprimento L da barra metálica que você usará como pêndulo físico e determine a localização do centro de massa da mesma.

2 – Pendure a barra por um de seus furos e coloque-a para oscilar com uma amplitude pequena. Utilizando um cronômetro meça o intervalo de tempo correspondente a cinco oscilações completas da barra.

3 – Meça a distância entre o centro do furo e a posição do centro de massa da barra.

4 – Repita os procedimentos 2 e 3 para outros furos da barra até que você obtenha um conjunto de dez (10) medidas. Comece com o furo mais afastado do centro de massa e não passe do furo imediatamente anterior ao centro de massa da mesma.