Experiência 7 - Corda Vibrante

1. OBJETIVO

O objetivo desta aula é estudar a propagação de uma onda mecânica transversal através de uma corda. A velocidade de propagação será obtida através de medidas diretas de comprimentos de onda em ondas estacionárias e também através da relação entre a tensão na corda e a densidade linear de massa da mesma.

2. INTRODUÇÃO

As ondas mecânicas se propagam através de diversos meios materiais e em cada um destes meios elas podem ter velocidades de propagação diferentes, dependendo do tipo de onda e das propriedades do meio. Vamos estudar o caso das ondas estacionárias em uma corda. Neste caso uma das extremidades da corda é agitada com uma certa freqüência e a outra extremidade permanece fixa.

Suponha uma corda de comprimento *L*, na qual propaga uma onda de freqüência f e comprimento de onda λ. A onda que propaga na corda tem que satisfazer à equação de onda [1]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{1}$$

onde $y = y(x,t)$ é a função que descreve a onda na corda e v é a sua velocidade. Além disso, a corda está presa nas extremidades. Este fato impõe condições sobre a onda propagando na mesma que são denominadas condições de contorno. Considerando a extremidade esquerda da corda (observe a FIG.2 abaixo) como sendo a origem do eixo *x*, e a extremidade direita da corda situada na posição $x = L$, podemos escrever as condições de contorno como:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0. \tag{2}$$

Uma onda estacionária na corda é obtida quando um *modo normal de vibração* da mesma é excitado. O modo normal aparece devido à interferência construtiva entre a onda incidente numa das extremidades da corda e a onda refletida na extremidade oposta da mesma. Isto acontece quando todos os elementos da corda oscilam com a mesma freqüência angular $\omega = 2\pi f$ e mesma constante de fase δ, ou seja, têm a mesma dependência temporal dada por $\cos(\omega t + \delta)$. Assim temos que cada ponto da corda, caracterizado por um valor de *x*, oscila com uma amplitude característica dada por *A(x)*. E podemos escrever a função *y*, que é a função que descreve a onda propagando na corda para este caso, como o produto de uma função exclusiva de *x* por outra função exclusiva de *t*:

$$y(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \delta). \tag{3}$$

Substituindo a Eq.(3), que deve ser uma solução da equação de onda, na Eq.(1), encontramos que a função *A(x)* deve satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 A = 0, \tag{4}$$

Onde $k = \frac{\omega}{v}$, é denominado o *número de onda*. Sabendo que $\omega = 2\pi f$ e também que $v = \lambda f$ encontramos a relação entre o número de onda *k* e o comprimento de onda λ:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{5}$$

A solução da equação diferencial descrita na Eq.(4) é uma combinação linear das funções *seno* e *cosseno*, e pode ser escrita como:

$$A(x) = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx). \tag{6}$$

Além disso ela deve satisfazer às condições de contorno, Eq.(2), que em termos da função *A(x)* ficam como:

$$A(0) = A(L) = 0. \tag{7}$$

Aplicando as condições de contorno encontramos:

$$\begin{aligned} A(0) &= a = 0; \\ A(L) &= b\,\mathrm{sen}(kL) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Como $b \neq 0$, pois do contrário a solução para y seria identicamente nula, chegamos à conclusão que para haver uma onda estacionária propagando na corda devemos ter $sen(kL) = 0$. Isto implica que apenas alguns valores de *k* são permitidos:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}(n = 1, 2, 3, ...). \tag{9}$$

Esses valores correspondem aos modos normais de oscilação da corda. Em termos do comprimento de onda podemos escrever:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}(n = 1, 2, 3, ...). \tag{10}$$

Na FIG.1 ilustramos os 4 primeiros modos normais de vibração da corda. O modo de ordem *n* contém *n* semi-comprimentos de onda e *n-1* nodos, além dos nodos nas extremidades fixas. Um nodo corresponde a um ponto na onda estacionária em que a amplitude de oscilação da corda é nula.

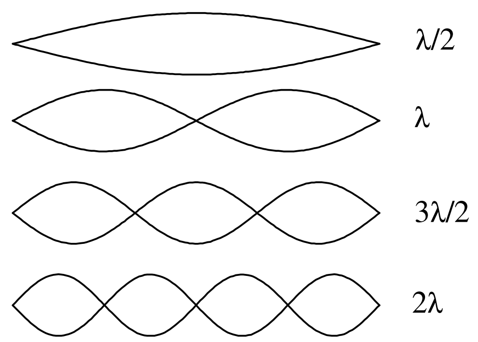

FIG. 1 - Ondas estacionárias em uma corda.

Embora possa parecer contraditório que o ponto móvel (onde a onda é injetada) pareça estar sendo considerado fixo, o que na verdade é feito é uma aproximação. O oscilador que agita a corda, realiza oscilações de amplitudes pequenas quando comparadas com a amplitude da onda na corda. O ponto fixo fica na realidade próximo do oscilador-agitador da corda e por simplicidade consideramos a posição do próprio oscilador como ponto fixo. Esta aproximação ficará ruim se a amplitude do oscilador for grande demais.

Como vimos anteriormente, a relação entre a velocidade de uma onda, a sua freqüência e comprimento de onda é dada por:

$$v = \lambda f, \tag{11}$$

onde v é a velocidade de propagação, λ é o comprimento de onda e f é a freqüência. Combinando as Eq.(10) e Eq.(11) chegamos à conclusão de que somente teremos ondas estacionárias na corda, quando a freqüência da onda injetada, ou a freqüência de excitação, tiver algum dos seguintes valores:

$$f_n = n\frac{v}{2L}. \tag{12}$$

Por outro lado, uma onda que se propague por uma corda que tenha uma certa densidade linear de massa μ e que esteja sendo esticada com uma força de módulo igual a T (tensão na corda), terá uma velocidade dada por :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \tag{13}$$

3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

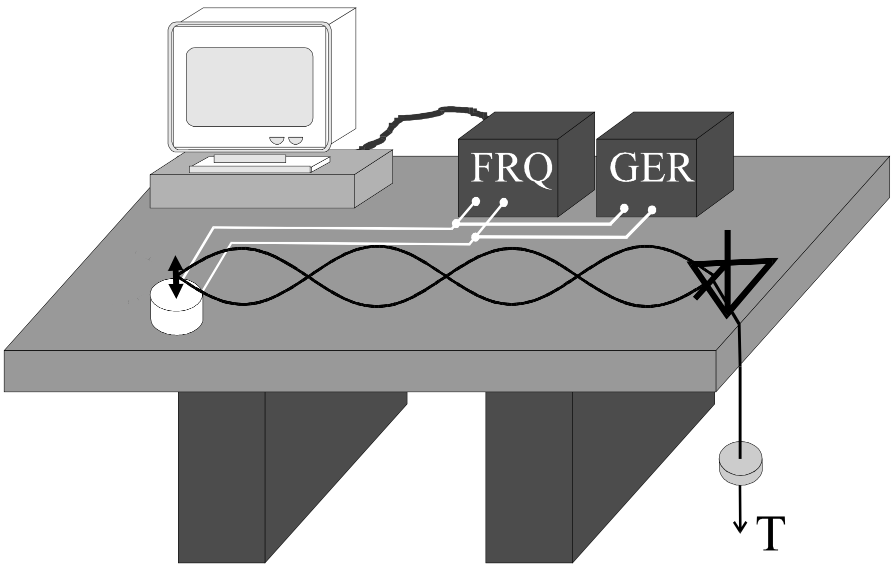

FIG. 2 - Esquema do aparato experimental – corda vibrante.

1 - Meça a massa M_L e o comprimento L da corda. Use estes dados para calcular a densidade μ da corda com sua respectiva incerteza.

2 - Prepare a montagem experimental descrita na FIG.2. Uma das extremidades da corda deve ficar presa. Ela pode ser presa à própria mesa. A corda deve ser passada por dentro do orifício da bobina, depois ser apoiado no suporte próximo à extremidade da mesa e finalmente acoplada ao suporte com as massas, cujo peso definirá a tensão na corda. Faça medidas para $M = 200g$ e $M = 400g$. Lembre-se de que $T = Mg$.

3 - Coloque a corda para oscilar, ajustando a amplitude e a freqüência do gerador. Comece com uma freqüência baixa e uma amplitude correspondendo à metade da escala do gerador.

4 - Aumente a freqüência gradativamente até que a onda estacionária correspondente a $\lambda/2$ seja observada. Ela terá apenas um máximo de amplitude. Faça a leitura da freqüência de excitação da bobina e meça com uma régua a distância L entre a bobina osciladora e o suporte onde a corda se apóia. Neste caso $L = \lambda/2$.

5 - Continue aumentando a freqüência gradativamente até encontrar cada uma das ondas com $2\lambda/2$, $3\lambda/2$, $4\lambda/2$, $5\lambda/2$, $6\lambda/2$, $7\lambda/2$ e $8\lambda/2$, sempre anotando as freqüências de excitação correspondentes. Para obter o valor de λ em cada situação, basta lembrar que $\lambda_n = \frac{2L}{n}$.

5. REFERÊNCIAS

[1] H. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, volume 2.